Gleichgewichtsbedingungen (Transkript)

1 - Hallo und herzlich willkommen zu dieser Präsentation über Gleichgewichtsbedingungen aus dem Themenbereich Schnittverläufe am Bogen.

2 - Grundsätzlich beschränken wir uns hier auf Kreisbögen mit einem konstanten Radius, weil die Schnittgrößen dann relativ einfach in Abhängigkeit des Winkels angegeben werden können. Dabei ist ein routinierter Umgang mit Sinus und Kosinus auf jeden Fall hilfreich. In diesem Beispiel haben wir einen Viertelkreisbogen mit Radius r und Mittelpunkt P, der links unten fest im Boden eingespannt ist und rechts oben mit den zwei Kräften $\boldsymbol{S_x}$ und $\boldsymbol{S_z}$ belastet wird. Zuerst sollte der Bogen freigeschnitten werden, damit anschließend die Lagerreaktionen bestimmt werden können.

3 - Es sollte kein Problem sein, $\boldsymbol{A_x}$ als $-\boldsymbol{S_x}$ und $\boldsymbol{A_z}$ als $-\boldsymbol{S_z}$ zu bestimmen. Für das Moment $\boldsymbol{M_y^A}$ ergibt sich $-r\boldsymbol{S_x} - r\boldsymbol{S_z}$. Natürlich können mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen die Lagerreaktionen für beliebig kompliziertere Belastungen als in diesem Beispiel bestimmt werden. Um die Schnittverläufe zu bestimmen, schneiden wir den Bogen anschließend bei einem beliebigen Winkel ψ.

4 - Für die folgenden Schritte nehmen wir die Lagerreaktionen als bekannt an. Da wir an den Schnittverläufen interessiert sind, müssen wir im Allgemeinen darauf achten, dass wir die Verläufe immer nur stückweise zwischen zwei äußeren Belastungen aufstellen können. Föppl-Verläufe sind, so wie sie am geraden Balken benutzt werden, am Bogen ungültig und nicht anzuwenden. Da wir in diesem Beispiel keine weiteren Belastungen am Bogen haben, können wir direkt die Verläufe in Abhängigkeit von ψ von 0° bis 90° aufstellen. Dabei entsprechen die eingezeichneten Schnittgrößen den gesuchten Schnittverläufen im angegebenen Winkelbereich.

Prinzipiell gibt es zwei naheliegende Wege, um die Normalkraft $\boldsymbol{F_t}(\psi)$ in tangentiale Richtung, und die Querkraft $\boldsymbol{F_r}(\psi)$ in radiale Richtung im Schnitt zu bestimmen. Entweder man projiziert die Schnittgrößen auf die Koordinatenrichtungen, oder die äußeren Belastungen auf die Schnittrichtungen, was beides kurz vorgestellt werden soll.

Da wir bei Projektionen im Allgemeinen eine Kraft in ihre Richtungskomponenten aufteilen, müssen die beiden entstehenden Kraftkomponenten natürlich immer kleiner/gleich der zu projizierenden Kraft sein. Geometrisch gesehen entspricht die zu projizierende Kraft also immer der Hypotenuse und die Richtungskomponenten immer den Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck.

5 - —

6 - Am Freikörperbild kann man oft schon erkennen, wo der Schnittwinkel sonst noch auftritt. Dann können die Anteile der Schnittgrößen in den verschiedenen Koordinatenrichtungen berechnet werden. Beispielsweise ist der Anteil von $\boldsymbol{F_t}$ in x-Richtung $\boldsymbol{F_t}\sin(\psi)$ und in z-Richtung $-\boldsymbol{F_t}\cos(\psi)$. Für $\boldsymbol{F_r}$ ergibt sich in x-Richtung $\boldsymbol{F_r}\cos(\psi)$ und in z-Richtung $\boldsymbol{F_r}\sin(\psi)$.

7 - So ergeben sich für die Kräftegleichgewichte in x- und in z-Richtung die dargestellten Zusammenhänge. Für das Moment wird gerne der Mittelpunkt als Bezugspunkt gewählt. Da sich hier die Wirkungslinien von $\boldsymbol{F_r}$ und $\boldsymbol{A_x}$ schneiden, erzeugen beide Kräfte kein Moment, während $\boldsymbol{F_t}$ und $\boldsymbol{A_z}$ immer mit dem gleichen Hebelarm eingehen. Man kann an den beiden Kräftegleichgewichten sehen, dass sie ineinander eingesetzt werden müssen, um $\boldsymbol{F_t}$ oder $\boldsymbol{F_r}$ in gegebenen Größen, also den Lagerreaktionen, anzugeben. Wenn aber nicht explizit nach den Kräftegleichgewichten in x- und in z-Richtung gefragt ist, gibt es einen eleganteren Weg, um die Schnittverläufe zu bestimmen. Diesmal projizieren wir nicht die Schnittgrößen auf die Koordinatenrichtungen, sondern alle Belastungen auf die tangentiale und radiale Richtung, wobei in diesem Beispiel nur die beiden Lagerkräfte zerlegt werden müssen.

8 - Mit etwas Übung und einer guten Skizze hat man schnell die beiden Komponenten gefunden. Der mit $\boldsymbol{A_{x,t}}$ bezeichnete Anteil der Kraft $\boldsymbol{A_x}$ in tangentiale Richtung, also parallel zu $\boldsymbol{F_t}$, ergibt sich zu $\boldsymbol{A_x}\sin(\psi)$ und der Anteil $\boldsymbol{A_{x,r}}$ in radiale Richtung zu $\boldsymbol{A_x}\cos(\psi)$. Es ergeben sich die links dargestellten Kräftegleichgewichte in tangentiale und radiale Richtung. Dabei kann man sehen, dass sich beide Zeilen sofort nach der Normalkraft $\boldsymbol{F_t}$ und der Querkraft $\boldsymbol{F_r}$, also unseren Schnittverlaufsgrößen, umstellen lassen. Für das Moment haben wir wieder den Bezugspunkt P gewählt. Eine Zerlegung der Lagerkräfte in tangentiale und radiale Komponenten würde uns hier die Arbeit unnötig verkomplizieren, also haben wir es auch nicht getan. Das Aufteilen der Belastungen in tangentiale und radiale Richtung kann man wie eine Drehung des Koordinatensystems verstehen.

9 - Dreht man das Freikörperbild, dann sind die tangentialen und radialen Kräfte sozusagen die neuen Horizontal- und Vertikalkräfte im gedrehten System. Man kann sich somit je nach Aufgabenstellung aussuchen, ob man lieber die Kräfte in Koordinatenrichtung addieren und Arbeit in die Umrechnung stecken, oder doch die Hauptarbeit für die Projektion in die Schnittrichtung aufbringen möchte. Beide Wege führen zum gleichen Ziel und sind auch für kompliziertere Belastungen gültig.