

Rechenregeln der Bruchrechnung (TRANSKRIPT)

1 - Hallo und herzlich Willkommen zur zweiteiligen Präsentationsreihe Bruchrechnung. In diesem Teil geht es um das eigentliche Rechnen mit Brüchen. Wir betrachten die Multiplikation und Division sowie die Addition und Subtraktion von zwei oder mehr verschiedenen Brüchen. Um die Darstellung möglichst einfach zu halten, betrachten wir zunächst das Kürzen von Brüchen.

2 - Wie wir bereits wissen, gibt es unendlich viele Möglichkeiten einen Bruch darzustellen, da er mit einer beliebigen Zahl erweitert werden kann. Deshalb versuchen wir Brüche mit kleinstmöglichen ganzen Zahlen darzustellen. Der Vorgang, einen beliebigen Bruch in diese Darstellung zu überführen, nennt man Kürzen. Durch Überfahren der Brüche können die jeweiligen Anteile am Kreis eingezeichnet werden. Rechnerisch kann man die kleinstmögliche Darstellung mit ganzen Zahlen über Primfaktoren bestimmen, die wir im folgenden näher betrachten.

3 - Zur Erklärung von Primzahlen und Primfaktoren betrachten wir die ersten zwanzig Zahlen. Hier gibt es - wie dargestellt - zwei verschiedene Gruppen: Zum einen gibt es Zahlen wie 4, 6 und 8, die als Produkt von kleineren Zahlen geschrieben werden können. Zum anderen gibt es Zahlen wie 2, 3, 5 und 7, bei denen das nicht möglich ist - den sogenannten Primzahlen. Primzahlen können nur als Produkt von 1 und sich selbst geschrieben werden, d. h. die Primzahl 5 kann nur als 1 mal 5 dargestellt werden. Bei den anderen Zahlen, die keine Primzahlen sind, ist das nicht so. Zum Beispiel kann 4 nicht nur als 1 mal 4, sondern auch als 2 mal 2 geschrieben werden. Acht nicht nur als 1 mal 8, sondern auch als 2 mal 4 und somit als 2 mal 2 mal 2. 15 nicht nur als 1 mal 15, sondern als 3 mal 5. Zahlen sind also entweder Primzahlen, oder können als Produkt von Primzahlen geschrieben werden. Dieses Produkt von Primzahlen sind die Primfaktoren. 18 hat also nicht nur die Faktoren 2 mal 9 oder 3 mal 6, sondern die Primfaktoren 2 mal 3 mal 3. Auch wenn wir hier nur die ersten zwanzig Zahlen betrachtet haben, sind diese Überlegungen für alle Zahlen gültig.

4 - Im nächsten Schritt denken wir uns eine beliebige Zahl. Wir wollen nun untersuchen, welche Primfaktoren diese Zahl hat, oder ob es sich um eine Primzahl handelt. Dazu überprüfen wir die Teilbarkeit durch die vorangegangenen Primzahlen. In der Regel beginnt man mit der kleinsten Primzahl - der zwei. Ist unsere gedachte Zahl eine gerade Zahl, so ist sie durch zwei teilbar und hat den Primfaktor zwei. Die Teilbarkeit durch 3 kann beispielsweise mit Hilfe der Quersumme überprüft werden - mehr dazu gleich. Die Teilbarkeit durch 5 kann an der Endung der Zahl abgelesen werden. Endet sie auf 0 oder 5, so ist die Zahl durch 5 teilbar. Die Teilbarkeit der weiteren Primzahlen 7, 11, 13, 17, 19 usw. muss gegebenenfalls nachgerechnet werden.

5 - Die Quersumme einer Zahl erhält man, indem man alle Ziffern einer Zahl addiert. Ist die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar, so ist auch die Zahl selbst durch 3 teilbar. Ist die Quersumme nicht durch 3 teilbar, so ist auch die Zahl nicht durch 3 teilbar.

6 - Auf dieser Folie befindet sich eine interaktive Übung zu Primzahlen und Primfaktoren. Bevor man sich die Lösung durch Überfahren mit der Maus anzeigen lässt, sollte man selbst versuchen die Primfaktoren zu bestimmen oder zu zeigen, dass es sich um eine Primzahl handelt. Beispielhaft sei das Vorgehen an der Zahl 70 demonstriert. Wir beginnen erneut mit der kleinsten Primzahl 2. Da 70 eine gerade Zahl ist, ist sie durch 2 teilbar - 35 mal. 35 wiederum ist eine ungerade Zahl und somit nicht durch 2 teilbar. Die Quersumme von 35 ist 8. Da 8 nicht durch 3 teilbar ist, ist auch 35 nicht durch 3 teilbar. 35 endet aber auf 5 und ist somit durch 5 teilbar - 7 Mal. Da 7 selbst eine Primzahl ist, haben wir die Primfaktoren von 70 gefunden: 2 mal 5 mal 7.

7 - Es folgt eine interaktive Übung zum Thema Kürzen. Diese Übung und das Kürzen im Allgemeinen baut auf Primfaktoren auf. Deshalb sollte das Vorangegangene entweder verstanden sein, oder jetzt nochmal geübt werden. In dieser Übung geht es darum, den Zähler und den Nenner eines Bruches in Primfaktoren zu zerlegen. Anschließend können gleiche Primfaktoren von Zähler und Nenner gegeneinander gestrichen werden. Wenn man alle gleichen Primfaktoren miteinander streicht und das Ergebnis zusammenfasst, hat man automatisch die kleinstmögliche Darstellung mit ganzen Zahlen.

8 - Das nächste große Thema ist die Multiplikation von Brüchen. Dabei werden sowohl die Zähler miteinander multipliziert und in den Zähler geschrieben, als auch die Nenner miteinander multipliziert und in den Nenner geschrieben. Oft kann man sich die Arbeit vereinfachen, wenn man vor der eigentlichen Multiplikation kürzt. Es ist auch möglich über Kreuz zu kürzen, d.h. den Zähler des einen Bruches mit dem Nenner des anderen.

9 - Bei der Multiplikation einer Zahl mit einem Bruch wird die Zahl mit dem Zähler multipliziert und in den Zähler geschrieben. Der Nenner wird beibehalten, sofern er nicht mit der Zahl gekürzt werden kann. Grafisch kann man sich

das Vorgehen wie die Addition der Anteile vorstellen.

10 - Die Reihenfolge der Multiplikation ist beliebig. Man sollte jedoch stets auf die Primfaktoren der einzelnen Zahlen achten, um das Ergebnis soweit wie möglich kürzen zu können - am besten schon vor der eigentlichen Multiplikation.

11 - Bei der Multiplikation von zwei oder mehr Brüchen multiplizieren wir Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Dabei gilt es darauf zu achten, dass gleiche Primfaktoren aus dem Zähler und dem Nenner miteinander gekürzt werden können. In diesem grafischen Beispiel multiplizieren wir einen Dreiviertelkreis mit einem Zweifünftelkreis. Entweder wir haben einen Dreiviertelkreis, teilen ihn in 5 gleichgroße Teile und wählen 2 davon aus, oder wir haben einen Zweifünftelkreis, teilen ihn in 4 gleichgroße Teile und wählen 3 davon aus. In beiden Fällen erhalten wir die gleiche Fläche bzw. das gleiche Ergebnis - 3 Zehntel.

12 - Jetzt kommen wir zur Division von Brüchen. Dabei kann jede Division auch als Multiplikation mit dem Kehrbuch geschrieben werden. Wichtig ist nur, dass wir den Term, der nach dem Doppelpunkt steht, einfach umdrehen. Anschließend können wir die Rechnung wie eine normale Multiplikation behandeln.

13 - Hier sind drei Beispiele für eine Division aufgeführt. In jedem Beispiel geht es darum, den Kehrbuch zu bilden, anschließend zu kürzen und dann die eigentliche Multiplikation auszuführen.

14 - Zur Vertiefung folgt eine Übung zur Multiplikation und Division. Auch dieses Mal ist es sinnvoll, erst die Aufgaben zu berechnen, bevor man sich durch Überfahren mit der Maus die Lösung anzeigen lässt.

15 - Das nächste große Thema ist die Addition von Brüchen. Hierbei geht es darum, zwei verschiedene Brüche auf einen möglichst kleinen gemeinsamen Nenner zu bringen und anschließend die Zähler zu addieren.

16 - Im einfachsten Fall addieren wir eine Zahl mit einem Bruch. Dabei kann das Ergebnis entweder direkt als gemischter Bruch geschrieben werden, oder durch Umrechnung als gemeiner Bruch.

17 - Um zwei verschiedene Brüche zu addieren, müssen wir sie zuerst auf einen gemeinsamen Nenner bringen um anschließend die Zähler addieren zu können. Im Beispiel von einem Drittel plus 2 Fünftel haben wir einen gemeinsamen Nenner von 15. Um den Nenner des ersten Bruches auf 15 zu bekommen muss der ganze Bruch mit 5 erweitert werden, beim zweiten Bruch mit 3. Daraus ergibt sich 5 Fünfehtel plus 6 Fünfehtel ist gleich 11 Fünfehtel.

18 - Im vorangegangenen Beispiel haben wir den gemeinsamen Nenner dadurch erhalten, dass wir beide Nenner miteinander multipliziert haben. Wenn die Zahlen im Nenner aber größer sind oder man mehrere Brüche miteinander addieren möchte, bietet es sich an, nicht auf das Produkt zu erweitern, sondern das KgV der Nenner als gemeinsamen Nenner zu verwenden. Das KgV ist das kleinste gemeinsame Vielfache, das im Folgenden vorgestellt wird.

19 - Um das KgV, das kleinste gemeinsame Vielfache, von zwei oder mehr Zahlen zu bestimmen, benötigen wir erneut die Primfaktoren und deren Häufigkeit. Für die Zahlen 6, 8 und 12 können wir beispielsweise folgende Tabelle erstellen, in der die Primfaktoren und deren Häufigkeit eingetragen ist. Anschließend brauchen wir den größten Eintrag pro Spalte. In diesem Fall kommen 3 Zweien und eine Drei vor. Daraus ergibt sich für die drei Zahlen ein KgV von 2 mal 2 mal 3 gleich 24.

20 - Hat man einen gemeinsamen Nenner für alle drei Brüche gefunden, idealerweise das KgV, so kann man die Brüche auf den gemeinsamen Nenner erweitern und die Zähler miteinander addieren. Anschließend ist es möglich, dass der Bruch noch gekürzt werden kann, was auf jeden Fall überprüft werden sollte.

21 - Zum Schluss werfen wir noch einen Blick auf die Subtraktion von Brüchen. Hat man die Addition von Brüchen verstanden, so sollte dieses Thema kein Problem mehr sein. Auch hier ist es wichtig, beide Brüche auf einen möglichst kleinen gemeinsamen Nenner zu bringen und anschließend die Zähler voneinander abzuziehen. Beim Ergebnis sollte man nicht vergessen zu überprüfen, ob noch gekürzt werden kann.

22 - Hier sind drei Beispielaufgaben zu sehen, bei denen das Vorgehen noch einmal dargestellt ist. Zuerst werden beide oder alle drei Brüche auf einen gemeinsamen Nenner gebracht, anschließend verrechnet und gekürzt.

23 - Zum Abschluss folgt noch eine interaktive Übung zum Thema Addition und Subtraktion. Auch hier ist es empfehlenswert zuerst die Aufgaben zu rechnen und anschließend deren Richtigkeit durch Überfahren mit der Maus zu überprüfen.

24 - Soviel zu den Rechenregeln. Damit sind wir am Ende dieser Präsentation angelangt. Falls sich noch Fragen, Anmerkungen oder Kritik ergeben sollte, so bin ich über meine Homepage erreichbar und freue mich über Rückmeldungen.