Spezielle Kreisbögen zwischen Rechteck und Kreis

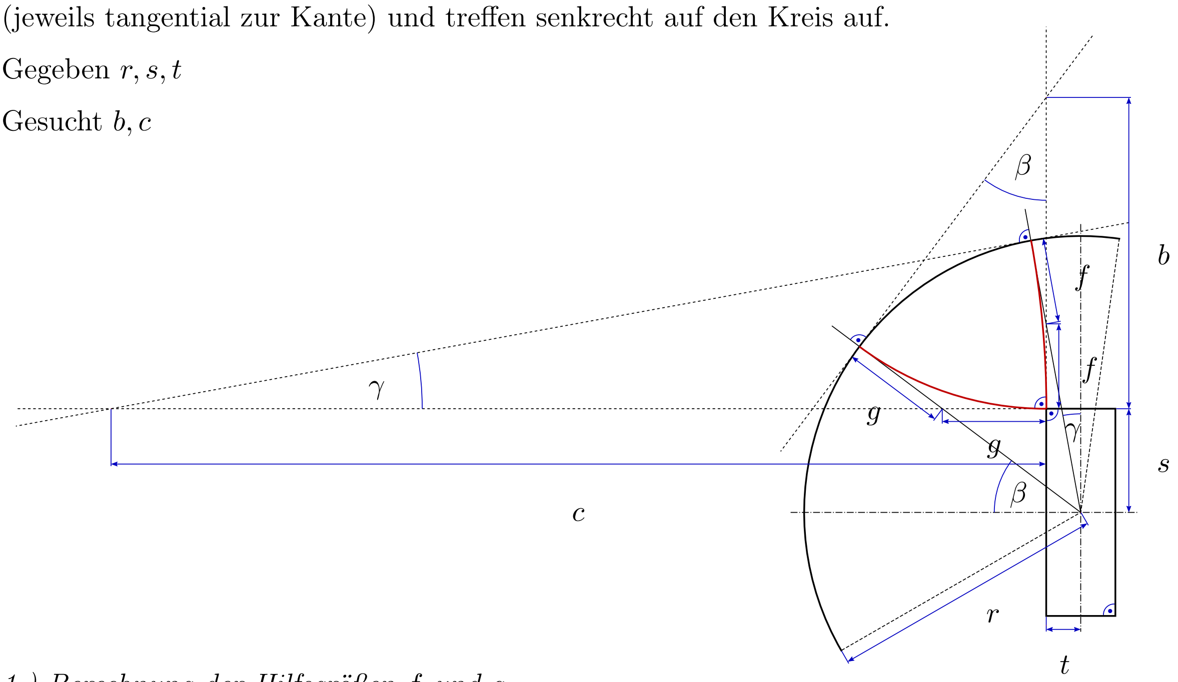
Dominik Zobel, 29. Mai 2015

dominik.zobel@tu-harburg.de

In einem Kreis mit Radius r befindet sich ein Rechteck (Seitenlängen $2s$ und $2t$), dessen Mittelpunkt dem des Kreises entspricht. Die gesuchten Kreisbögen beginnen an den Ecken des Rechtecks (jeweils tangential zur Kante) und treffen senkrecht auf den Kreis auf.

Gegeben r, s, t

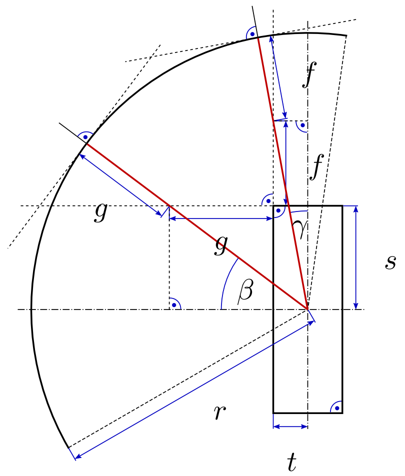
Gesucht b, c



1.) Berechnung der Hilfsgrößen f und g
Für die Radien r, die senkrecht mit den Kreisbögen vom Rechteck auftreffen gilt

$$r = f + \sqrt{(f+s)^2 + t^2} \qquad \Rightarrow f = \frac{r^2 - s^2 - t^2}{2(r+s)},$$

$$r = g + \sqrt{(g+t)^2 + s^2} \qquad \Rightarrow g = \frac{r^2 - s^2 - t^2}{2(r+t)}.$$



2.) Bestimmung der Winkel β und γ
Aus den rechtwinkligen Dreiecken um den Mittelpunkt ergibt sich

$$\tan(\beta) = \frac{s}{t+g}, \qquad \tan(\gamma) = \frac{t}{s+f}.$$

3.) Berechnung der Längen b und c
An den Hilfslinien der Kreisbögen ergibt sich der Zusammenhang

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{g}{b}, \qquad \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{f}{c}.$$

Mithilfe des Additionstheorems $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$ gilt deshalb

$$\frac{s}{t+g} = \frac{2\frac{g}{b}}{1-\left(\frac{g}{b}\right)^2} \qquad \Rightarrow b = \frac{g}{s}\left(t + g + \sqrt{(g+t)^2 + s^2}\right) \qquad \Rightarrow b = \frac{r^2 - s^2 - t^2}{2s},$$

$$\frac{t}{s+f} = \frac{2\frac{f}{c}}{1-\left(\frac{f}{c}\right)^2} \qquad \Rightarrow c = \frac{f}{t}\left(s + f + \sqrt{(f+s)^2 + t^2}\right) \qquad \Rightarrow c = \frac{r^2 - s^2 - t^2}{2t}.$$